文章编号:1000-4939(2024)06-1274-08

一种在线快速图像抖动消除方法及其在疲劳试验中的应用

张文东[1,2],陈莉[1,2],陈先民[1,2],苏少普[1,2]

(1. 中国飞机强度研究所,710065 西安;2. 强度与结构完整性全国重点实验室,710065 西安)

摘　要:提出一种基于先验信息的直方图匹配算法,以实现疲劳试验中试件观测图像抖动的在线快速消除。首先,根据灰度阈值对基准帧图像和目标帧图像计数统计形成直方图;其次,采用傅里叶变换将直方图变换为频域信息,并根据先验信息确定偏移阈值,进行互相关分析从而获得互相关数组;最后,选取互相关数组中的最大值,并根据最大值位置确定目标帧图像的抖动量,进行图像抖动的消除。基于先验信息的互相关频域分析极大地降低了计算量,从而使得本研究方法可以实现高分辨率图像中抖动的在线快速消除。试验结果表明,对于分辨率为 4 096 ×3 000 的图像,在保持抖动消除效果不变的情况下,本研究算法与传统方法相比,计算效率提高了 3 倍,能满足疲劳试验中试件观测的试验应用需求。

关键词:疲劳试验;图像消抖;直方图匹配;互相关分析;傅里叶变换

中图分类号:V216.3;TP391.4　**文献标志码**:A　**DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2024.06.006

An online fast image dithering elimination method and its application in fatigue test

ZHANG Wendong[1,2],CHEN Li[1,2],CHEN Xianmin[1,2],SU Shaopu[1,2]

(1. Aircraft Strength Research Institute of China,710065 Xi'an,China;
2. National Key Laboratory of Strength and Structural Integrity,710065 Xi'an,China)

Abstract:This paper proposes a histogram matching algorithm based on prior information to realize the online rapid dithering elimination of the observation image in the specimen in the fatigue test. The reference frame and target frames were The histogram was counted to form a histogram first. Then the Fourier transform was used to transform the histogram into the frequency domain,and the offset threshold was determined based on prior information. After that cross-correlation analysis was used to obtain a cross-correlation array. Finally the maximum value in the cross-correlation array was selected and the dithering quantity of the target frame was determined according to the maximum value position to eliminate image dithering. Cross-correlation frequency domain analysis based on prior information greatly reduced the computational

收稿日期:2023-05-26　　修回日期:2023-09-15
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 51601175);航空基金资助项目(No. 2020Z058023006)
通信作者:张文东,高级工程师。E-mail: dongzi.666@163.com
引用格式:张文东,陈莉,陈先民,等. 一种在线快速图像抖动消除方法及其在疲劳试验中的应用[J]. 应用力学学报,2024,41(6):1274-1281.
ZHANG Wendong,CHEN Li,CHEN Xianmin,et al. An online fast image dithering elimination method and its application in fatigue test[J]. Chinese journal of applied mechanics,2024,41(6):1274-1281.

quantity, so that the proposed method could achieve online rapid dithering elimination in high-resolution images. The test results showed that the computational efficiency of the proposed algorithm is increased by three times compared with the traditional method while keeping the dithering elimination effect unchanged for the image with a resolution of 4 096 × 3 000. The results could satisfy the application requirements of specimen observation in fatigue test.

Key words: fatigue test; image dithering elimination; histogram matching; cross-correlation analysis; fourier transform

飞机在服役运营过程中,机体结构在疲劳载荷下容易萌生裂纹,裂纹的扩展会降低结构剩余强度从而影响到结构完整性[1]。为了验证含裂纹结构在疲劳载荷下的承载能力,会开展含裂纹结构的疲劳试验,记录疲劳循环载荷和对应裂纹长度等信息,以此作为含裂纹结构损伤容限性能的评估依据。在实际疲劳试验过程中,试件在疲劳载荷下会发生振动。通常试验中会采用工业相机对试验过程进行监测和记录,试件的振动会造成监测画面的抖动,极大地影响试验人员对裂纹的准确观测,并影响到裂纹长度的记录。

消除试验过程中裂纹图像抖动可以采用加速度传感器、滤镜和图像稳定器等硬件设备,但成本高、效率低,应用场景也受限较多。采用计算机视觉技术对目标图像进行消抖处理已经是一个重要的研究方向[2],消抖技术在目标检测与跟踪、视频稳定和视频监控等领域具有广泛的应用[3-4]。对抖动的图像估计出运动位移继而进行运动位移补偿可以实现裂纹的消抖。彭鼎仁[5]在相位相关法基础上引入对数极坐标在频域中求取图像的抖动量,再以此图像逆滤波复原的先验知识建立图像退化模型,对图像序列进行逆滤波复原,能有效地消除图像间的抖动。王珂等[6]提出一种基于改进 ORB 和匹配策略融合的图像配准方法,通过采用稳健的 RootSIFT 描述符描述特征,结合距离比值、双向匹配和余弦相似性测度匹配策略获得初始匹配,最后利用 RANSAC 算法确定最终的特征点匹配关系,实现序列帧之间的精确配准。陈建明等[7]系统综述了基于深度学习技术实现图像配准的相关研究进展,深入讨论了基于深度迭代配准、全监督图像配准、弱/双重监督图像配准、无监督图像配准等典型的深度学习的图像配准方法,并对不同方法的优缺点进行了总结。

本研究提出一种基于直方图统计的图像消抖方法,能够快速消除振动状态下的疲劳试件图像,有助于试验人员更加准确地观察裂纹信息,同时也为后续的裂纹特征分析提供对齐的裂纹图像。

1　方法理论及实现过程

本节从图像直方图建立、直方图特征相似度评价和互相关分析等方面描述疲劳试件图像消抖方法的技术细节和实现过程。

1.1　传统直方图匹配算法

疲劳试验过程中采用 CCD 相机采集关注区域图像,所采集到的图像像素处理为灰度图像,灰度值的范围是 0 ~ 255。图像抖动一般都是沿着图像竖直方向发生,只需要考虑这个方向的抖动消除,因此只需要建立抖动方向的图像直方图。一般沿着垂直于抖动方向对图像各像素灰度值累加,则产生一个沿着抖动方向的一维直方图,定义如下。

$$G(j) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} I(i,j);\ i = 1,2,3,\cdots,M;\ j = 1,2,3,\cdots,N \tag{1}$$

式中:i 为图像水平方向的像素索引;j 为图像竖直方向的像素索引;M 和 N 为水平和竖直方向的最大索引值;$I(i,j)$ 为图像 (i,j) 的灰度值。

疲劳金属试件表面一般具有因材料轧制加工工艺造成表面分布明显的条状纹理,由于纹理相似度较高,如果按照像素直方图的方式统计图像各行水平方向上所有像素点的灰度值总和,可能会导致每个相关系数值居高,降低后续匹配的可靠度。为了提高基准帧和目标帧的有效匹配,本研究采用灰度阈值计数的方式,当某个像素的灰度值超过灰度阈值后则设置为 1,否则设置为 0,再对每一行上的数值进行累加并计算均值,作为新的图像直方图,这种图像直方图定义如下。

$$G(i) = \frac{\sum_{j=1}^{N} D(i,j)}{M},$$

$$D(i,j) = \begin{cases} 1 & I(i,j) < \text{Gray_Thresh} \\ 0 & I(i,j) < \text{Gray_Thresh} \end{cases} \tag{2}$$

式中:M 为图像水平方向的像素个数;Gray_Thresh 为灰度阈值;$I(i,j)$ 为图像(i,j)的灰度值。这种定义方式只统计超过灰度阈值的像素个数,可以通过设置不同灰度阈值产生不一样的图像直方图。

抖动前后图像的特征匹配转化为了对应图像直方图的相似度评价,相似度能够量化分析图像之间的灰度特征关系。统计学中常用巴氏距离(Bhattacharyya distance)测量两个概率分布的相似度,因此可以用巴氏距离对直方图特征相似度进行评价。相关函数是描述不同信号在任意两个不同时刻的取值之间的相似程度,相似性用相关系数来衡量。考虑到分析效率和计算精度,本研究采用相关函数计算抖动前后图像直方图的相关系数,作为评价对应直方图的相似度参数。函数 R 和 T 在数学上定义为 $R^*(x)$ 和 $T(x)$ 乘积的积分,表达式为

$$C(\Delta x) = R \otimes T = \int_{-\infty}^{+\infty} R^*(x) T(x + \Delta x) \mathrm{d}x \tag{3}$$

式中:$\otimes$表示互相关运算;上标 * 表示共轭复数;Δx 表示 C 最大时对应两函数之间距离的抖动量。需要分析的图像直方图有 N 个统计值,R_i 和 T_i 分别表示基准帧和目标帧在直方图中的第 i 个统计值,互相关表达式的离散形式可表达为

$$C_{\mathrm{ZNCC}} = \frac{\sum_i \overline{R}_l \, \overline{T}_l}{\sqrt{\sum_i (R_l)^2 \sum_i (T_l)^2}} \tag{4}$$

式中,$\overline{R}_l = R_i - R_{\mathrm{m}}$,$\overline{T}_l = T_i - T_{\mathrm{m}}$,$R_{\mathrm{m}}$ 和 T_{m} 分别是消抖前后图像直方图统计值的平均值。由于在实数域 $R^*(x) = R(x)$,因此表示共轭复数的上标 * 在式(4)被忽略。

1.2　基于先验信息的直方图匹配算法

通常在计算互相关系数时,需要沿着竖直方向分析整个幅值范围的相关系数,考虑到疲劳试验载荷较小并且呈周期变化,试件图像相互之间的抖动量实际较小,可以约定一个偏移阈值 H 能够完全涵盖裂纹实际的振动幅值,这样就可以极大地降低互相关系数的计算量。通过设定偏移阈值对基准帧直方图和目标帧直方图进行互相关分析(图1)。

首先以基准帧为基础,对目标帧进行左移偏移阈值 H,目标帧右侧缺少的数据全部以0补全,形成第一组互相关运算对;然后对目标帧左移 $H-1$,右侧缺少的数据以0补全,这样就形成了第二组运算对;以相同的方式直至基准帧与目标帧对齐;接着对目标帧右移1,左侧缺少的数据以0补全,形成新的运算对;以相同的方式不断右移目标帧,左侧缺少的数据全部以0补全,不断形成新的运算对,直至右移距离达到偏移阈值 H。最终可以产生 $2H+1$ 组互相关运算对,对这些运算对进行互相关运算,即得到 $2H+1$ 个互相关系数。

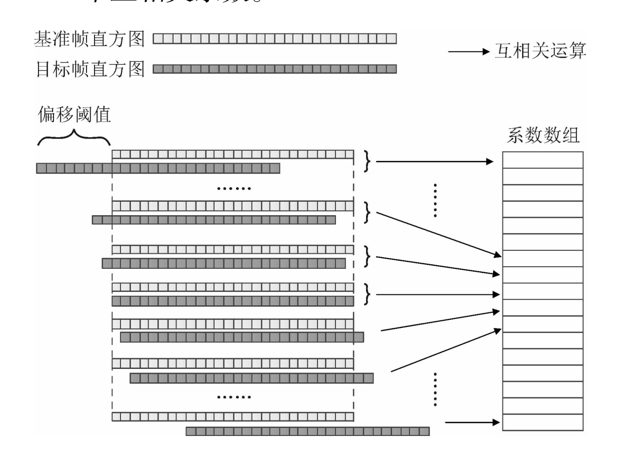


图1　偏移阈值影响下的图像直方图互相关分析示意图

Fig. 1　Schematic diagram of image histogram cross-correlation analysis affected by offset threshold

为了简化互相关运算并且提高互相关的计算速度,互相关计算可以在频域进行[8],根据傅里叶变换理论[9],互相关分析在空域的分析等价于在频域的简单运算,互相关运算过程为

$$R \otimes T = FT^{-1}\{[FT(R)]^* \cdot FT[T]\} \tag{5}$$

式中:R 表示基准帧直方图;T 表示目标帧直方图;$\otimes$表示互相关运算;$FT(\cdot)$ 和 $FT^{-1}(\cdot)$ 分别表示傅里叶变换和傅里叶逆变换;$[\quad]^*$ 表示共轭复数。

互相关运算时,首先分别对基准帧和目标帧进行离散傅里叶变换,得到基准帧空域值(含实部和虚部)和目标帧空域值进行乘法运算,产生新空域值,再对新空域值进行傅里叶逆变换,则可以得到互相关系数数组,从而完成基准帧直方图和目标帧直方图的互相关分析。

通过对直方图建立和互相关分析的阐述,最终形成疲劳试验试件图像的快速消抖流程(图2),具体步骤如下。

1)拍摄获取基准帧和目标帧,分别生成基准帧和目标帧的直方图。

2)对直方图分别进行傅里叶变换,获得基准帧和目标帧的频域信息。

3)基准帧频域信息的共轭值与目标帧的频域信息相乘,对该结果进行傅里叶逆变换,获得互相关数组。

4)选取互相关数组中的最大值,根据最大值位置确定目标帧的抖动量。

5)对目标帧进行平移处理,平移量为抖动量,平移方向为抖动反方向。

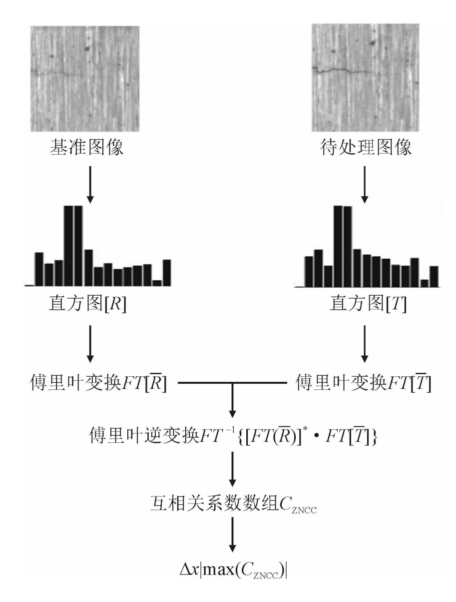


图 2　试件图像消抖处理流程

Fig. 2　Process of specimen image dithering elimination

2　参数影响研究与算法验证

本节对消抖方法中的参数影响进行分析,并完成对算法的验证。为了更直观地分析试件图像的灰度信息,对图 3 的试件图像灰度信息进行统计,统计直方图如图 4 所示。

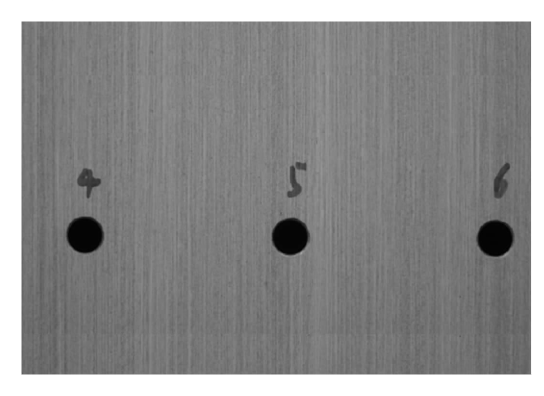


图 3　铝合金试件图像

Fig. 3　The image of aluminum alloy specimen

图 4 可知,图像中的灰度大部分分布在 100 ~ 150,灰度值 4 的像素占了一定比例,主要是由于孔洞处灰度值较低造成的,图像中灰度值较高的比例几乎为零,灰度值 124 所占的比重最大。

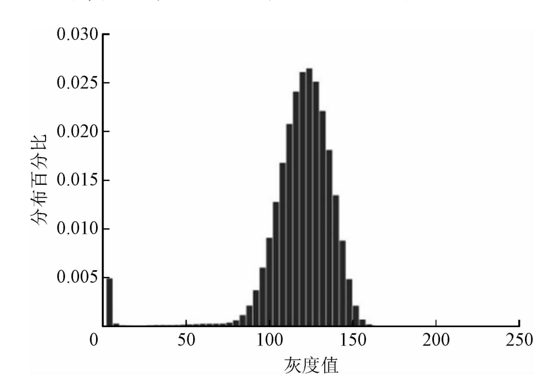


图 4　试件图像灰度统计直方图

Fig. 4　Gray statistical histogram of specimen image

2.1　灰度阈值的影响

灰度阈值是本研究定义图像直方图的重要参数,不同的灰度阈值产生不同的图像直方图,而图像直方图是特征相似度分析的对象,因此灰度阈值会对最终结果有较大的影响。如果灰度阈值较小,则图像直方图统计值较大整体分布均匀;如果灰度阈值较大,则图像直方图统计偏小整体分布均匀;这种较为均匀的分布没有获得图像的特征,因此在后续的相似度分析中,容易造成结果错误或者无法获得结果。

以图 1 的铝合金试件裂纹图像为例,在灰度阈值分别是 40、80、120 和 150 时,统计获得裂纹图像的图像直方图,如图 5 所示。

由图 5 可知,当灰度阈值为 40 时,只有一小段有计数,对应裂纹图像的孔洞;当灰度阈值为 80 时,有两段相隔不远的计数,对应裂纹图像的数字标记和孔洞;当灰度阈值为 120 时,各个位置均有数量不一的计数,图像直方图特征最明显;当灰度阈值为 150 时,由于大部分灰度值小于 150,所以各位置的计数都较多,区别度不高。

为了研究灰度阈值对分析结果的影响,根据不同的灰度阈值获得的图像直方图,分别针对 40、80、100、120、150、200 和 255 灰度值获得的图像直方图,然后在偏移阈值为 50 像素下分别计算各抖动量的互相关系数,互相关分析结果如图 6 所示。

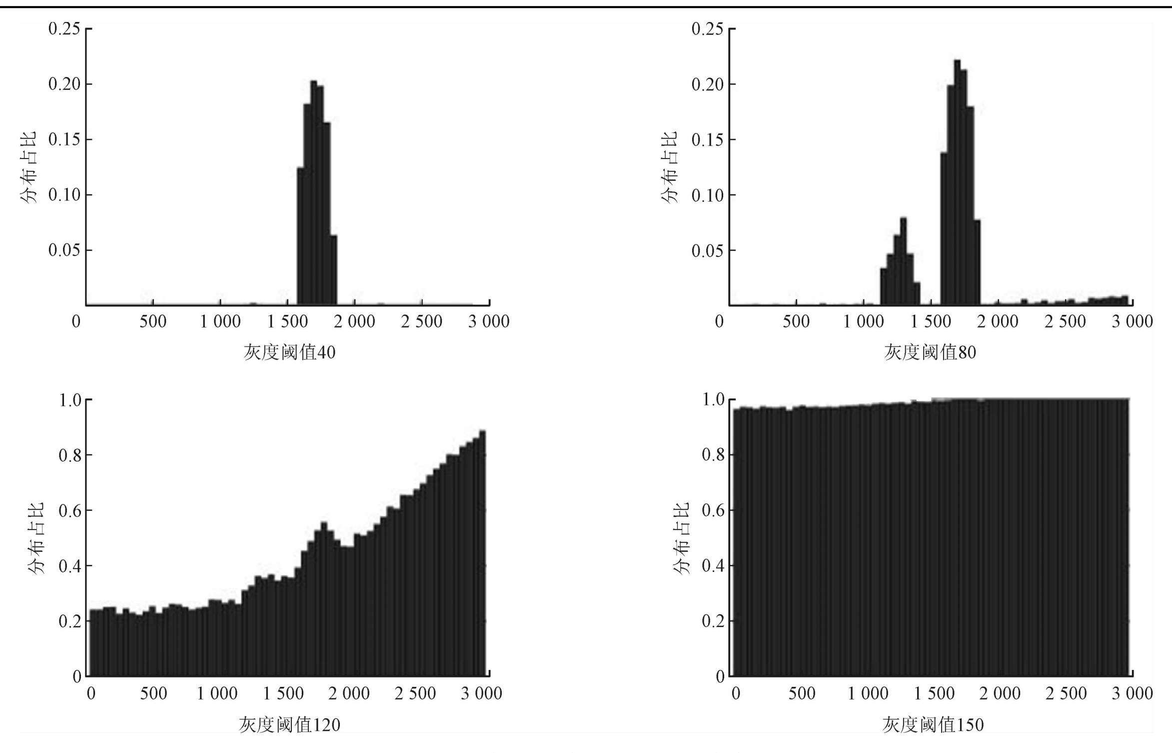


图 5　不同灰度阈值下的试件图像直方图

Fig. 5　Specimen image histogram of different gray threshold values

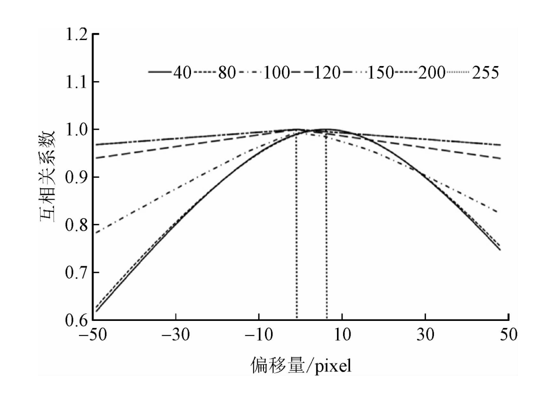


图 6　不同灰度阈值对应的互相关分析结果

Fig. 6　Cross-correlation analysis results of different gray threshold values

由图 6 可知,灰度阈值确实对分析结果造成影响。当灰度阈值为 40 和 80 时,互相关系数的极值对应 6 像素的抖动量;当灰度阈值为 100、120、150、200 和 255 时,互相关系数的极值对应的抖动量 -1 像素。图 6 对应算例的准确抖动量是 6 像素。随着灰度阈值的增大,抖动量发生了变化引起错误;还可以看出随着灰度阈值的增大,互相关系数的方差快速降低,由灰度阈值为 40 对应的 0.01 快速降低到 255 对应的 9×10^{-5},系数方差偏低表明互相关系数各值均匀性好,反映出了该灰度阈值下不同的抖动量的相关性不明显,因而导致了错误的抖动量。可见较小的灰度阈值具有较高的可靠性,因此在分析时建议使用较小的灰度阈值。

2.2　偏移阈值的影响

本研究方法还需要考虑偏移阈值这个参数的影响,偏移阈值的影响主要体现在两个方面:第一个方面是偏移阈值过小的影响,如果阈值小于基准帧和目标帧的最大相对抖动量,后续计算就不能得到正确的抖动量;另一方面是偏移阈值过大的影响,这种情况下虽然不会影响计算抖动量的准确性,但是会造成较大的计算成本,降低计算效率。本研究以 Intel Core™ i5-8400CPU@ 2. 80GHz 计算机,运算分析 4 096 ×3 000 分辨率的试件图像为例,将偏移阈值分别设定为 50、100、200、400、1 000 和3 000 处理 100 帧,在不考虑频域计算的情况下获得的单帧平均分析时间,计算结果见表 1;同时为了更大限度地提高计算效率,在 6 个不同偏移阈值基础上,采用傅里叶运算的频域计算,傅里叶变换的计算采用FFTW 三方库(版本为 3.3.10),该计算库通过基准比对测试表明在速度和准确性方面均具有很强的性能[10],计算结果列在表 1 中。

表 1　不同偏移阈值下的分析时间

Tab. 1　Analysis time under different offset thresholds

偏移阈值/pixel	单帧平均分析时间/ms	
	未采用频域计算	采用频域计算
50	15.037	3.957
100	20.561	6.286
200	29.214	7.623
400	40.238	8.452
1 000	49.235	9.237
3 000	56.403	10.115

由表 1 可知,未采用频域计算互相关系数的情况下,分析时间随着偏移阈值的增加而增加,特别是在偏移阈值较小时,分析时间的增加速度较快,随着偏移阈值的增大,分析时间的增加速率变缓,如偏移阈值从 50 pixel 变为 100 pixel 对应的分析时间增加了 5.5 ms,而偏移阈值从 1 000 pixel 增大到 3 000 pixel时,分析时间只增加了 7.2 ms,因此较大的偏移阈值对分析时间的影响不敏感,要保证高效的分析,需要确定一个合适的较小的偏移阈值。采用频域计算互相关系数的情况下,偏移阈值的大小对分析时间的影响遵循相同的规律,区别点在于采用了频域计算后,提高了计算效率,如偏移阈值为 50 时分析效率相较未采用频域计算提高了 2.8 倍,当偏移阈值为 3 000 时分析效率相比未采用频域计算提高了 4.5 倍。因此,在分析计算过程中,只要偏移阈值不会影响到计算结果的准确性,应尽可能地减小偏移阈值,并采用频域计算以达到提高计算效率的目的。

3　试验验证

为了验证本研究消抖方法在实际试验中的应用效果,设计了平板多裂纹试验件(图 7),图 7 中所示为试验件的部分设计尺寸,其中试验件宽度为 500 mm,长度为 1 000 mm,试验件中心位置共线并列 7 个孔,孔直径为 4 mm,孔位置处的试验件半宽度 $W = 400$ mm,试验件厚度 $t = 4$ mm;试验件左右对称,对设计了裂纹扩展试验。试验机选用1 000 kN Instron8801 液压伺服疲劳试验机,试验加载频率为 4.5 Hz,温度为室温,试验现场如图 8 所示。试验过程中采用 Basler acA4112-30um 相机搭配维视远心镜头 BT-11C056-DH 获取试件图像,采集帧率为 30 Hz。

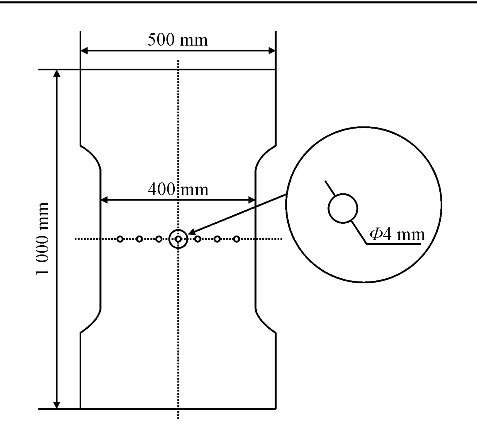


图 7　多孔疲劳试验件示意图

Fig. 7　The schematic drawing of multi-hole fatigue specimen



图 8　疲劳试验现场实施图

Fig. 8　Fatigue test actual operation scene

对试验过程采集的连续图像进行抖动量分析,灰度阈值选取 40,偏移阈值选取 50,对试验中 100 帧连续图像计算抖动量,结果如图 9 所示。最大的抖动量为正向 20 像素和反向 22 像素,最小抖动量为 0。图中选取的 4 个目标帧对应的抖动量分别为 15、-14、20 和 -22 像素。由图 9 可知,抖动量呈周期性变化,反映了试件在交变载荷下的抖动现象。

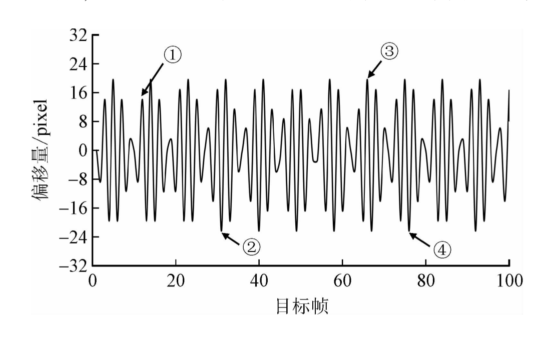


图 9　试验过程试件图像的抖动量计算

Fig. 9　The offset calculation of specimen image during test process

获得试件图像与基准帧的抖动量后,可以根据抖动量对图像平移处理获得新图像,新图像作为输

出图像显示给试验操作人员,则可以起到消抖的作用,图 10 为对应图 9 过程中 4 个时刻点进行消抖处理后的图像,在试件加载过程试件图像存在上下抖动,由于抖动量相对试件图像竖直方向上的像素量较小,平移占比不明显,在抖动量较大时,则能够明显看出图像发生了平移。

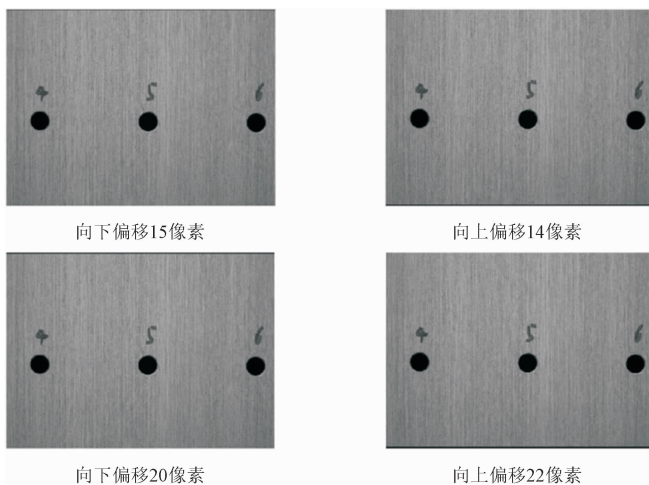


图 10 试验过程 4 组图像的平移操作

Fig. 10 Translation operation of image in four states during the test process

为了评估消抖处理的效果,分别采用本研究的消抖方法对消抖前和消抖后的图像进行抖动量计算。对于图 9 中的 100 帧图像计算抖动量后,相应可以获得 100 帧消抖后的图像,再对 100 帧消抖后图像进行抖动量计算,计算结果如图 11 所示。经过消抖处理后的序列帧,再次计算获得的抖动量非常小,基本上在 1 像素和 -1 像素之间波动,说明本研究消抖方法对于试验中的图像具有有效的消抖处理效果。

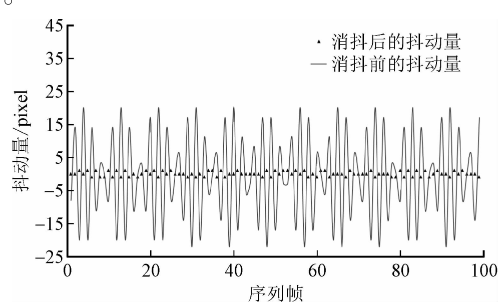


图 11 消抖前后图像的抖动量分析结果

Fig. 11 Analysis results of image dithering quantity before and after dithering elimination

为了评估本研究方法与常规直方图方法抖动量计算结果的误差,采用常规直方图方法对试验过程中的 100 帧序列帧计算了抖动量,并与图 9 中的结果进行了对比(图 12)。由图 12 可知,本研究方法和常规直方图方法计算结果非常接近,两者之间的偏差的最大值为 1 像素,最小值为 -1 像素,整体偏差较小,经过对偏差的统计分析,偏差满足均值为 0.03 像素方差为 0.77 的正态分布,表明偏差分布较为集中,均分布在 2σ 区间内。结果表明,本研究方法和常规直方图方法的计算精度相当,也验证了本研究方法的准确性。

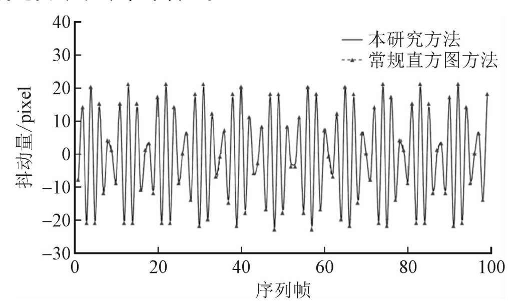


图 12 本研究方法和常规直方图方法的结果对比

Fig. 12 Comparison of the results between the method in this paper and the traditional histogram method

为了更加直观地体现本研究方法在计算效率上的优势,选取试验 5 个不同阶段的 100 帧连续帧进行消抖处理,本研究方法和常规直方图方法的分析时间如图 13 所示。

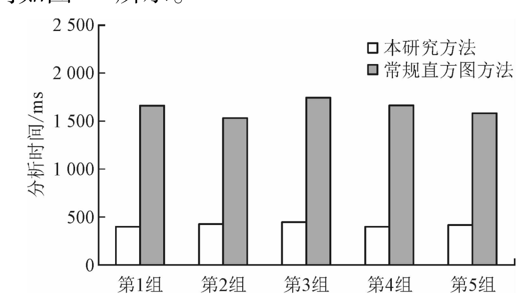


图 13 本研究方法和常规直方图方法的分析时间对比

Fig. 13 Comparison of the analysis time between the method in this paper and the traditional histogram method

本研究方法在 5 个阶段的消抖处理中分析时间在 400 ms 上下波动,而传统直方图方法的分析时间则 1 600 ms 上下波动,本研究方法相比传统直方图法分析效率提高了大约 3 倍,在试验过程中快速消抖处理方面具有更大的优势。

4　结　论

在疲劳试验中受交变载荷的影响,试件图像的抖动造成观测误差大并容易引起视觉疲劳,本研究的分析方法基于灰度阈值的直方图统计,并基于傅里叶变换进行互相关分析,可以高效准确地解决图像抖动问题。通过对实际疲劳试验中的试件图像进行了消抖处理,根据本研究方法获得的抖动量与常规直方图分析方法进行对比分析,可知本研究方法与常规直方图法计算的抖动量偏差很小,并且偏差分布集中,说明本研究方法和传统直方图法的分析精度相当,但是本研究方法在分析效率上是传统直方图法的 4 倍,本研究方法具有明显优势。本研究的方法具有较高的计算效率和准确性,能够在实际试验中满足试件实际观测的需求。

参考文献:

[1] 王彬文, 陈先民,苏运来,等. 中国航空工业疲劳与结构完整性研究进展与展望[J]. 航空学报,2021,42(5):1-39.
WANG Binwen, CHEN Xianmin, SU Yunlai, et al. Research progress and prospect of fatigue and structural integrity for aeronautical industry in China[J]. Acta aeronautica et astronautica Sinica, 2021,42(5):1-39(in Chinese).

[2] GONZALEZ R C,WOODS R E. 数字图像处理[M]. 北京:电子工业出版社,2010.

[3] 杨毅,李大成,于杰,等. 基于迭代更新的 SIFT 遥感图像配准算法[J]. 无线电工程,2023,53(2):401-409.
YANG Yi,LI Dacheng,YU Jie,et al. A remote sensing image registration algorithm based on SIFT with iterative update strategy[J]. Radio engineering,2023,53(2):401-409(in Chinese).

[4] REDDY B S,CHATTERJI B N. An FFT-based technique for translation,rotation, and scale-invariant image registration[J]. IEEE transactions on image processing,1996,5(8):1266-1271.

[5] 彭鼎仁. 飞行器目标图像的旋转与抖动分析研究[D]. 武汉:武汉工程大学,2022.

[6] 王珂,邓安健,臧文乾. 基于改进 ORB 和匹配策略融合的图像配准方法[J]. 测绘与空间地理信息,2023,46(2):43-47.
WANG Ke, DENG Anjian, ZANG Wenqian. Image registration method based on the fusion of improved ORB and matching strategy[J]. Geomatics & spatial information technology,2023,46(2):43-47(in Chinese).

[7] 陈建明,曾祥津,钟丽云,等. 基于深度学习的图像配准方法研究进展[J]. 量子电子学报,2022,39(6):899-926.
CHEN Jianming, ZENG Xiangjin, ZHONG Liyun, et al. Research progress of image registration methods based on deep learning[J]. Chinese journal of quantum electronics,2022,39(6):899-926(in Chinese).

[8] JIANG Z Y,QIAN K M,MIAO H,et al. Path-independent digital image correlation with high accuracy,speed and robustness[J]. Optics and lasers in engineering,2015,65:93-102.

[9] 潘文杰. 傅里叶分析及其应用[M]. 北京:北京大学出版社,2000.

[10] FRIGO M,JOHNSON S G. The design and implementation of FFTW3[J]. Proceedings of the IEEE,2005,93(2):216-231.

（编辑　张璐）